### **Задача 1**

Кои множества са определими в ⟨Z,⋅,=˙⟩.

Ще покажем за {0},{1},{−1}:

1. {0} : Ще използваме че произволно число по нула е нула (и няма други с това свойство): ∀*x*(*x*⋅*y*=˙*y*);
2. {1} : Ще иползваме, че произволно число по едно е самото число (и няма други с това свойство) : ∀*x*(*x*⋅*y*=˙*x*);
3. {−1} : Ще използваме, че −1∗−1==1 и няма друго с това свойство. Разбира трябва да си дефинираме и 1 вътре (защото не може да #include-нем горното :)) ∃*y*(∀*x*(*x*⋅*y*=˙*x*)&*z*⋅*z*=˙*y*&¬*z*=˙*y*) - тук *y* ще бъде 1, а *z* е удовлетворено само от −1.

Сега ще покажем, че всички други синглетони (множества от по едно число) не са определими: Ще покажем как се прави за {2} за другите аналогично. Нека дефинираме автоморфизъм *h* който *размества* 2 и 3 (2 прости числа). С други думи *h*(*a*)=2*x*3*y*⋯=2*y*3*x*…1 - просто виждаме на кои степени участват 2 и 3 в каноничното разлагане на *a* и ги променяме (степента на 2 става степен на 3 и обратно). По този начин не е трудно да се убедим, че това наистина е хомоморфизъм (трябва да запазва операцията), именно *h*(*a*)⋅*h*(*b*)=*h*(*a*⋅*b*). С този автоморфизъм {2} отива в {3} следователно {2} не е определимо.

### **Задача 2**

Кои са определими в ⟨Q,+⟩?

По аналогични разсъждения намираме, че {0} е определимо, а всички други числа могат да бъдат разместени с автоморфизма *h*(*x*)=2*x*.

### **Задача 3**

Кои са определими в ⟨Q,⋅⟩?

Аналогично показваме, за {0},{−1},{1}. За да покажем за останалите може да използваме 2 подхода:

* разместване на две прости - в този случай обаче трябва да разместваме и в числителя и в знаменателя (едновременно) да не вземе да се изпосъкрати нещо;
* *h*(*x*)={01*xx*=0*x*≠0 - това размества всички синглетони с изключение на вече определените.

### **Задача 4**

Кои са определими в ⟨N,<⟩.

На лекции е показвано, че:

* всички крайни множества са определими - дефинираме си първо 0, после 1, итн - всяко естествено, след което лесно образуваме обединение на произволен брой (но краен) естествени.
* всички безкрайни, които са допълнение на крайни (например N∖{0,2,5,1321}) - това става просто като сложим едно отрицание пред горните - показвано е.
* за останалите (чудите се дали има още ли - ами примерно простите - безкрайно е и допълнението му не е крайно :-/) се доказва (сложно) че не може. Не ни е работа сега да го правим :)

### **Задача 5**

Кои са определими в ⟨R,+⟩.

Като при Q.

### **Задача 6**

Може ли да се определи Q в ⟨R,⋅⟩.

Ами не - използваме биекцията *h*(*x*)=*x*3 наобратно :) (самата биекция не размества Q но обратната функция на *h* - т.е *h*−1 го размества, с други думи казано корен трети върши работа). Просто обръщам внимание, че може да вземем явна фукция и да я обърнем (може обърнатата да не е well-known) - важното е да върши работа.

### **Задача 7**

Може ли да се определи {12} в ⟨Q,0,1,<⟩.

Ще покажем, че не може.

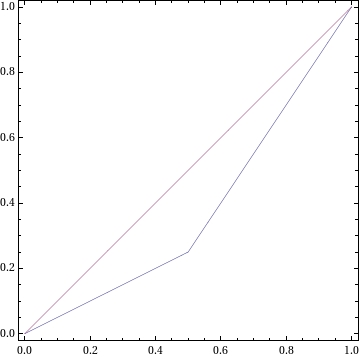
Тук трябва да подходим малко по-различно. Някак е очевидно, че ако разместим числата в интервала (0,1) така, че относителния им ред да не се промени (т.е биекцията трябва да запази <), но от друга страна да се посбият леко числата към единия или другия край - т.е да станат 'по-гъсти' - така ще може да разместим {12}. За да опишем процеса формално е достатъчно да си изберем точно две рационални числа от (0,1) - нека ги кръстим с *p*,*q*. Ще опитаме да направим биекцията, така че *h*(*p*)=*q*, и всички числа преди *p* отиват преди *q*, всички числа след *p* отиват след *q*:

(1)

*h*(*a*)=⎧⎩⎨⎪⎪⎪⎪⎪⎪*ap*⋅*qqa*−*p*1−*p*⋅(1−*q*)+*qa*<*pa*=*pa*>*p*

Лесно се проверява,че това е биекция и запазва знака.

Друг вариант да се опише (по-нагледно) е геометрично:



Това е графиката на гореописаната функция за *p*=12,*q*=14. (който не вярва да си я начертае сам с математика ;)).

### **Задача 8**

Да разгледаме Език с един двуместен предикат *p* и структура с универсум всички затворени кръгове в реалната равнина, като предиката определя дали две кръгчета имат обща точка.

Да се определят:

(1) съвпадение на кръгчета;

(2) включване на кръгче в друго;

(3) вътрешно допиране на описаните окръжности на кръгчетата;

(4) външно допиране на описаните окръжности на кръгчетата;

(5) включване на кръгче в друго без окръжностите им да се допират;

**Решение**: Ще си кръщаваме формулите които дефинираме за всяка точка, за да може да ги ползваме в следващите точки:

(1) Двете кръгчета са еднакви относно предиката.

(2)

Eq(*x*,*y*)⇌∀*z*(*p*(*x*,*z*)⟺*p*(*y*,*z*))

(2) За всяко кръгче което пресича вътрешното трябва да пресича и външното.

(3)

In(*x*,*y*)⇌∀*z*(*p*(*x*,*z*)⇒*p*(*y*,*z*))

(3) Тук е малко по-усукано: Трябва първото да е във второто, да съществува такова, което пресича и двете (но е външно за второто) такова че всяко негово вътрешно или пресича и 2те начални или не ги пресича и 2те. Един вид *z* е такова, което се допира външно до 2те, а *t* е вътрешно за *z*, което или не допира и 2те, или ако допира едното трябва да допира и другото( в същата точка).

(4)

InT(*x*,*y*)⇌In(*x*,*y*)&∃*z*(¬In(*z*,*y*)&*p*(*x*,*z*)&*p*(*y*,*z*)&∀*t*(In(*t*,*z*)⇒(*p*(*t*,*x*)&*p*(*t*,*y*))∨(¬*p*(*t*,*x*)&¬*p*(*t*,*y*))))

(4) Сега ще използваме горното:

(5)

OutT(*x*,*y*)⇌*p*(*x*,*y*)&∀*z*(In(*z*,*x*)&*p*(*z*,*y*)⇒InT(*z*,*x*))

(5)

(6)

InR(*x*,*y*)⇌In(*x*,*y*)&¬InT(*x*,*y*)